Vyjádření posloupnosti

Posloupnost můžeme určit několika různými způsoby. Prvním je prostý výčet prvků. Například jednoduchá posloupnost sudých čísel by se výčtem dala zapsat takto: $2, 4, 6, 8, 10...$

Další možností je vzorec pro $n$tý člen. Stejná posloupnost by se dala zapsat takto: $a_n = 2n$. Dolní index n nám značí, který člen posloupnosti zrovna máme na mysli. Například zápis a_3 znamená třetí člen posloupnosti a podle uvedeného vzorce by třetí člen byl $2 * 3$, což je šest a to je třetí sudé číslo. Vše tudíž sedí jak má.

Nejveselejší obvykle bývá určení pomocí rekurentního vzorce. Ten funguje tak, že určíte následující člen pomocí předchozího a prvního členu posloupnosti. Posloupnost sudých čísel tedy lze rekurentně zapsat takto:

$$a_1 = 2; \quad a_{n+1} = a_n + 2.$$

Pokud chcete nyní zjistit druhý člen posloupnosti, jednoduše doplníte za n jedničku a počítáte: $a_{1+1} = a_1 + 2$ po dosazení vyjde $a_2 = 2 + 2$ a to se rovná čtyřem. Což sedí, druhé sudé číslo je právě čtyři. Poslední možnost vyjádření posloupnost je graficky. Grafem posloupnosti je vždy množina samostatných navzájem izolovaných bodů.

Aritmetická posloupnost

Aritmetická posloupnost je jednoduchá posloupnost, kdy je mezi jednotlivými členy posloupnosti stálý rozdíl. Každý následující prvek je například větší o tři či třeba menší o sedmnáct. Rozdíl, o kolik je jednotlivé prvky posloupnosti odlišují, se nazývá diference (značíme *d*). V prvním případě by byla diference tři, v druhém mínus sedmnáct a v případě posloupnosti sudých čísel by byla diference dva.
Vzorcem by se tedy aritmetická posloupnost dala zapsat takto:

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

Obecný vzorec pro výpočet *n*tého členu aritmetické posloupnosti je poté

$a_n = a_1 + (n - 1)d$. Pokud byste například měli dokázat, jestli je tato posloupnost $(2n + 7)_{n=1}$ aritmetická, postup by byl následující:

$a_n = 2n + 7$
$a_{n+1} = 2(n + 1) + 7$
$a_{n+1} - a_n = 2n + 9 - 2n - 7 = 2$

Diference je dva, jedná se o aritmetickou posloupnost.
Tak teď ještě pár dalších užitečných vzorečků. Začneme součtem prvních *n* členů posloupnosti.

$$S_n = (n / 2) * (a_1 + a_n).$$

Druhý vzorec pak popisuje způsob, jak vypočítat diferenci či libovolný člen posloupnosti, pokud neznáte první člen:

$$a_r - a_s = (r - s)d.$$

Vzorečky ještě jednou všechny pohromadě

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$a_r = a_s + (r - s)d$$

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

d … diference aritmetické posloupnosti
s_n … součet prvních n-členů posloupnosti

Příklady:

1) Jaké hodnoty bude mít prvních 6 členů aritmetické posloupnosti?

$a_1 = -1; d = 3$

$a_1 = -1$

$a_2 = -1 + (2-1)\cdot 3 = -1 + 3 = 2$

$a_3 = -1 + (3-1)\cdot 3 = -1 + 6 = 5$

$a_4 = -1 + (4-1)\cdot 3 = -1 + 9 = 8$

$a_5 = -1 + (5-1)\cdot 3 = -1 + 12 = 11$

$a_6 = -1 + (6-1)\cdot 3 = -1 + 15 = 14$

2) Jaký bude 1. člen a diference posloupnosti?

$a_2 + a_6 = 32$

$\underline{a_4 + a_5 = 36}$

$a_1 + d + a_1 + 5d = 32$

$\underline{a_1 + 3d + a_1 + 4d = 36}$

$2a_1 + 6d = 32 \Rightarrow a_1 = \dfrac{32-6d}{2} = 16 - 3d$

$\underline{2a_1 + 7d = 36}$

$2(16-3d) + 7d = 36$

$32 - 6d + 7d = 36$

$d = 36 - 32$

$d = 4$

$a_1 = 16 - 3\cdot 4 = 16 - 12 = 4$

3) Pátý člen aritmetické posloupnosti je roven 11, devátý 19. Kolik členů je třeba sečíst, aby byl jejich součet 440?

$a_r = a_s + (r-s)\cdot d$

$19 = 11 + (9-5)\cdot d$

$\underline{d = 2}$

$a_5 = a_1 + (n-1)\cdot d$

$11 = a_1 + (5-1)\cdot 2$

$\underline{a_1 = 3}$

$s_n = \dfrac{n}{2}\cdot(a_n + a_1)$

$440 = \dfrac{n}{2}\cdot(a_1 + (n-1)\cdot d + a_1)$

$440 = \dfrac{n}{2}\cdot(3 + 2n - 2 + 3)$

$\underline{\underline{n = 200}}$

4) Nejmenší vnitřní úhel mnohoúhelníku je 117°, největší 171°. Velikost úhlů tvoří aritmetickou posloupnost. Kolik má mnohoúhelník stran a jek velké má vnitřní úhly.

n = počet stran, Pro

n = 3 $\Rightarrow 1\cdot 180°$

n = 4 $\Rightarrow 360° = 2\cdot 180°$

n = 5 $\Rightarrow 540° = 3\cdot 180°$

n = 6 $\Rightarrow 720° = 4\cdot 180°$

n =…$\Rightarrow$ (n-2)·180°

$s_n = (n-2)\cdot 180°$

$s_n = \dfrac{n}{2}\cdot(\alpha_1 + \alpha_n)$

$(n-2)\cdot 180° = \dfrac{n}{2}\cdot(\alpha_1 + \alpha_n)$

$180°n - 360° = \dfrac{n}{2}(117° + 171°)$

$180°n - 360° = 144°n$

$\underline{n = 10}$

$$\alpha_n = \alpha_1 + (n-1)\cdot d$$

$$171° = 117° + 9d$$

$$\underline{\underline{d = 6°}}$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 + d$$

$$\alpha_2 = 117° + 6° = 123°$$

$$\alpha_3° = 129°$$

$$\alpha_4 = 135°$$

$$\alpha_5 = 141°$$

$$\vdots$$

$$\alpha_{10} = 171°$$

Příklad: Vypočtěte součet všech trojciferných čísel dělitelných třemi

Řešení : Čísla 3, 6 9, ... atd. tvoří aritmetickou posloupnost s diferencí d = 3. Tato úloha se tedy týká aritmetické posloupnosti a to součtu aritmetické posloupnosti. Pro dosazení do vzorce musíme ale napřed určit vedle d = 3 ještě a_1, a_n, n

Pro určení a_1 a a_n je nutné si vzpomenout, že všechna čísla dělitelná 3 jsou taková, jejichž ciferný součet je dělitelný 3 Nejnižší trojciferné číslo je 100 Nejnižší trojciferné číslo dělitelné 3 je tedy 102. Nejvyšší trojciferné číslo je 999 . To je také dělitelné 3 Aritmetická řada má tedy a_1 = 102 a a_n = 999 Zbývá vypočítat n a potom po dosazení do vzorce vypočítat s_n	$a_n = a_1 + (n-1).d$ a dosadíme $999 = 102 + (n-1).3$ $897 = (n-1).3$ $\frac{897}{3} = n - 1 \rightarrow 299 = n - 1$ $n = 300$ $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ $s_{300} = \frac{300}{2}.(102 + 999)$ $s_n = 150 . 1101 = 165\,150$

Výsledek : s_n = 165 150

Geometrická posloupnost

Geometrická posloupnost se od předchozí aritmetické liší tím, že dva sousední členy nemají stejný rozdíl, nýbrž podíl. Tomuto podílu se říká kvocient (značíme q). Takže jednoduchá geometrická posloupnost by třeba mohly být mocniny desíti - 10, 100, 1000... Kvocient by zde byl pochopitelně deset, neboť po dosazení do vzorečku $q = a_{n+1} / a_n$ dostaneme například $q = 1000 / 100 = 10$. Z těchto vzorečků už můžeme pomalu odvodit rekurentní vzorec geometrické posloupnosti:

$$a_{n+1} = a_n \times q$$

(prostě vynásobíte jeden člen kvocientem a dostanete následující člen - pokud byste chtěli předchozí člen, místo násobení budete dělit). Vzorec pro obecný člen goniometrické posloupnosti poté je

$$a_n = a_1 \times q^{n-1}.$$

Geometrické posloupnosti můžeme ještě rozdělit do dalších dvou skupin a sice podle toho, jaký mají kvocient. Pokud totiž bude absolutní hodnota kvocientu menší než jedna, bude celá posloupnost klesat k nule. Takováto posloupnost se tedy nazývá konvergentní. Naopak pokud bude absolutní hodnota kvocientu větší než jedna, bude posloupnost chvátat k nekonečnu a říká se jí divergentní posloupnost. Pro konvergentní posloupnost poté platí jednoduchý vzorec pro součet celé řady (platí pouze pro konvergentní, protože divergentní se blíží k nekonečnu a tak její součet je de facto nekonečno): $s = a_1 / 1 - q$.

Vzorečky ještě jednou všechny pohromadě

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_r = a_s \cdot q^{r-s}$$

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$a_n = a_0 \cdot \left(1 \pm \frac{q}{100}\right)^n$$

q … kvocient geometrické posloupnosti
s_n … součet prvních n-členů posloupnosti
± … + nárůst, - pokles

1) Jaké hodnoty bude mít prvních 5 členů geometrické posloupnosti?

$$a_1 = -4; q = \frac{1}{2}$$

$$a_1 = -4$$

$$a_2 = (-4)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2-1} = (-4)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{1} = (-4)\cdot\frac{1}{2} = -\frac{4}{2} = -2$$

$$a_3 = (-4)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3-1} = (-4)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2} = (-4)\cdot\frac{1}{4} = -\frac{4}{4} = -1$$

$$a_4 = (-4)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{4-1} = (-4)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3} = (-4)\cdot\frac{1}{8} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$$

$$a_5 = (-4)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5-1} = (-4)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{4} = (-4)\cdot\frac{1}{16} = -\frac{4}{16} = -\frac{1}{4}$$

2) Vypočtěte $a_1,\ q = ?$

$$a_1 + a_4 = 195$$

$$\underline{a_2 + a_3 = 60}$$

$$a_1 + a_1 \cdot q^3 = 195$$

$$\underline{a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 = 60}$$

$$a_1 \cdot (1+q)\cdot(1-q+q^2) = 195$$

$$\underline{a_1 \cdot (1+q)\cdot q \qquad = 60}$$

$$\frac{195}{1-q+q^2} = \frac{60}{q}$$

$$60 - 60q + 60q^2 = 195q$$

$$\underline{60q^2 - 255q + 60 = 0}$$

$$q_{1,2} = \frac{255 \pm \sqrt{255^2 - 4\cdot 60\cdot 60}}{120} = \frac{255 \pm 225}{120} = \left\langle \begin{array}{l} \dfrac{30}{120} = \underline{\dfrac{1}{4}} \\ \dfrac{480}{120} = \underline{4} \end{array}\right.$$

$$a_1 \cdot (1+q_1)\cdot q_1 = 60$$

$$a_1 \cdot 5 \cdot 4 = 60$$

$$\underline{\underline{a_1 = 3}}$$

$$a_1 \cdot (1+q_2)\cdot q_2 = 60$$

$$a_1 \cdot \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{4} = 60$$

$$\underline{\underline{a_1 = 19}}$$

3) Za jak dlouho nastřádáme 90 000 Kč při ukládání částky 2000 Kč na počátku každého roku při 2% úrokování?

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \qquad 2\% \Rightarrow q = 1{,}02$$

$$90000 = 2000 \cdot \frac{1{,}02^n - 1}{1{,}02 - 1}$$

$$45 = \frac{1{,}02^n - 1}{0{,}02}$$

$$0{,}9 = 1{,}02^n - 1$$

$$1{,}02^n = 1{,}9$$

$$\log 1{,}02^n = \log 1{,}9$$

$$n = \frac{\log 1{,}9}{\log 1{,}02} = 32{,}4 \doteq \underline{\underline{32}}$$

4) Jedním tažením drátu se zmenší průměr drátu o 10%. Jaký průměr bude mít drát s původním průměrem 6mm po osmi taženích?

$$q = 10\%$$

$$d_0 = 6mm$$

$$\underline{n = 8}$$

$$d_8 = d_0 \cdot \left(1 - \frac{q}{100}\right)^8$$

$$d_8 = 6 \cdot (1 - 0{,}1)^8$$

$$\underline{\underline{d_8 = 2{,}58mm}}$$

5) Počet obyvatel města vzrostl za 10 let z 56 000 na 72 800. Jaký byl roční přírůstek obyvatel v procentech?

Počet obyvatel města vzrostl za 10 let z 56 000 na 72 800. Jaký byl roční přírůstek obyvatel v procentech?

$$n = 10$$

$$a_0 = 56000$$

$$a_n = 72800$$

$$\underline{q = ?}$$

$$a_n = a_0 \cdot \left(1 + \frac{q}{100}\right)^n$$

$$72800 = 56000 \cdot \left(1 + \frac{q}{100}\right)^{10}$$

$$1{,}3 = \left(1 + \frac{q}{100}\right)^{10}$$

$$\sqrt[10]{1{,}3} = 1 + \frac{q}{100}$$

$$\sqrt[10]{1{,}3} - 1 = \frac{q}{100}$$

$$\left(\sqrt[10]{1{,}3} - 1\right) \cdot 100 = q$$

$$\underline{\underline{q = 2{,}65}}$$

Použitá literatura

http://matematika.havrlant.net/posloupnosti

http://www.vysokeskoly.cz/maturitniotazky/otazky/matematika/AritmetickaPosloupnost.htm

Následující stránky doporučuji:

http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/diplomky/posloupnosti/index.htm