Nerovnice

Lineární nerovnice s neznámou $x \in R$ je každá nerovnice ve tvaru $ax + b > 0$, $ax + b < 0$, $ax + b \leq 0$ nebo $ax + b \geq 0$, kde a, b jsou reálné koeficienty.

Při řešení nerovnic využíváme **ekvivalentní úpravy.**

1. výměna stran nerovnice
2. přičtení čísla nebo výrazu k oběma stranám nerovnice
3. vynásobení obou stran nerovnic stejným kladným číslem nebo výrazem,
4. vynásobení obou stran nerovnice záporným číslem se záměnou znaku nerovnosti
5. umocnění obou stran nerovnice přirozeným mocnitelem, jen když jsou obě strany rovnice kladné
6. odmocnění obou stran nerovnice přirozeným odmocnitelem, jen když jsou obě strany kladné

Ukázka na příkladu $x^2 < 4$

1. $4 > x^2$
2. $x^2 + x < 4 + x$
3. $x^2 * x^4 < 4 * x^4$
4. $x^2 * (-5) > 4 * (-5)$
5. $(x^2)^2 < 4^2$
6. $\sqrt{x^2} < \sqrt{4}$

Lineární nerovnice

Lineární nerovnice jsou takové nerovnice, v nichž se vyskytuje proměnná x nejvýše se stupněm mocniny jedna, tzn. jde o nerovnice, které lze převést na jeden ze základních tvarů: $ax + b > 0$, $ax + b < 0$, $ax + b \leq 0$ nebo $ax + b \geq 0$, kde a,b jsou libovolná reálná čísla, $x \in R$ je neznámá.

1. **Řešte v N nerovnici:**

$$\frac{2+27x}{6} < \frac{5}{2} + \frac{12x+1}{3} \qquad /*6$$

$2 + 27x < 15 + 24x + 2$

$3x < 15 \qquad /:3$

$x < 5$

$K \in \{ 1; 2; 3; 4\}$

2. **Řešte v R nerovnici:**

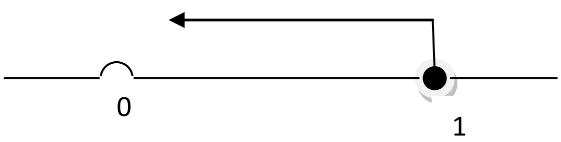
$$\frac{3}{2}(x+3) \geq 2(x+2) \qquad /*2$$

$3(x + 3) \geq 4(x + 2)$

$3x + 9 \geq 4x + 8$

$-x \geq -1 \qquad /*(-1)$

$x \leq 1$



$x \in (-\infty, 1\rangle$

3. **Řešte v R nerovnici:**

$2 (x - 2) > 2 (x - 3)$

$2x - 4 > 2x - 6$

$0 > -2$

Řešením je libovolné reálné číslo.

$x \in (-\infty,\infty)$

4. **Řešte v R nerovnici:**

$x + 5 < x - 2$

$0 < -7$

Daná nerovnice nemá řešení.

5. **Řešte v R nerovnici:**

$\frac{2x-3}{x-1} \geq 0$

Rovnice nelze násobit jmenovatelem, protože nevíme, zda je kladný nebo záporný.

Řešíme na základě úvahy, kdy je zlomek kládný, tedy větší nebo roven nule:

a) Je-li čitatel kladný a jmenovatel kladný
b) Je-li čitatel záporný a jmenovatel záporný

Řešíme variantu a)

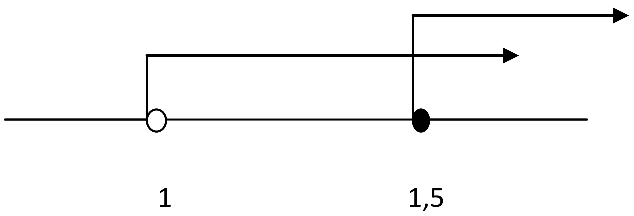
$2x - 3 \geq 0$

$\underline{\;\; x - 1 > 0}$

$$x \geq \frac{3}{2}$$

$$x > 1$$

Znázorníme graficky

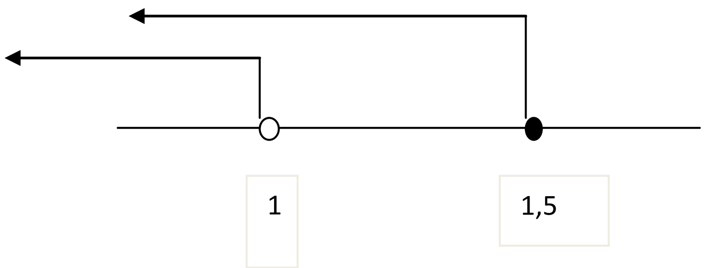


$x \in \langle\frac{3}{2}; \infty)$

Nyní obdobně řešíme variantu b)

$$2x - 3 \leq 0$$
$$\underline{x - 1 < 0}$$
$$x \leq \frac{3}{2}$$
$$x < 1$$

Znázorníme graficky



x ∈ (-∞;1)

Výsledkem je sjednocení varianty a) a b)

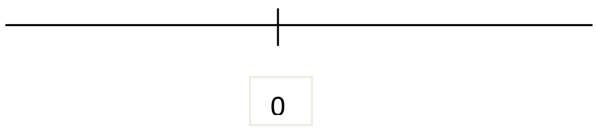
x ∈ (-∞;1) ∪ $\langle\frac{3}{2}; \infty)$

Nerovnice s absolutní hodnotou

Řešte nerovnici:

|x| < 2

Najdeme nulový bod x = 0



Dostaneme dva intervaly (-∞;0⟩ a (0;∞)

Zjistíme pro každý z intervalů jakou hodnotu má absolutní hodnota:

1. (-∞;0⟩ dosadíme nějaké číslo z tohoto intervalu do absolutní hodnoty a zjistíme, že hodnota je záporná

   |x| = -x

   $$-x < 2$$
   $$x > -2$$

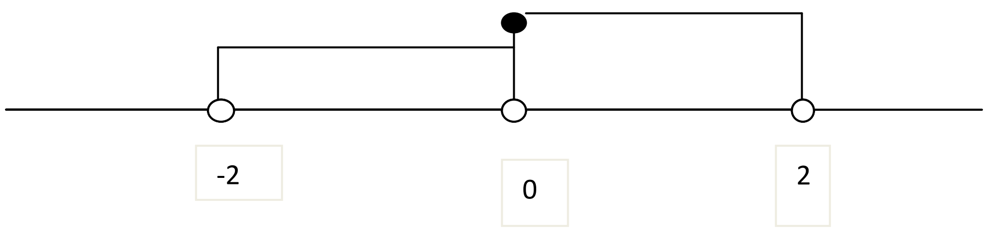
x ∈ (-2;0⟩

2. (0;∞) dosadíme nějaké číslo z tohoto intervalu do absolutní hodnoty a zjistíme, že hodnota je kladná

   |x| = x

   $$x < 2$$

x ∈ ⟨0;2)



x ∈ (-2;0⟩ ∪ ⟨0;2) ⇔ x ∈ (-2;2)

Řešte nerovnici

$|x - 1| > 2$

Nulový bod $\quad x - 1 = 0 \;\Rightarrow x = 1$

$(-\infty;1\rangle$

$|x - 1| \Rightarrow -x + 1$

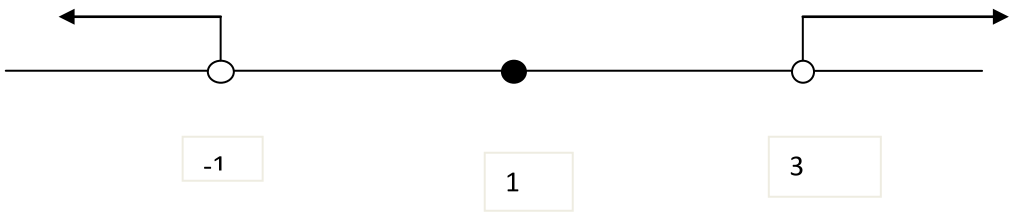
$-x + 1 > 2$
$-x > 1$
$x < -1$

$x \in (-\infty;-1)$

$(1;\infty)$
$|x - 1| \Rightarrow x - 1$

$x - 1 > 2$
$x > 3$

$x \in (3;\infty)$



$x \in (-\infty;-1) \cup (3;\infty)$

Soustavy lineárních nerovnic

Příklad: Řešte soustavu nerovnic:

$$3(x-1) \geq 2x-5$$
$$3(2x-1) < \frac{1}{2}(3+3x) \qquad /*2$$

Řešíme postupně obě rovnice:

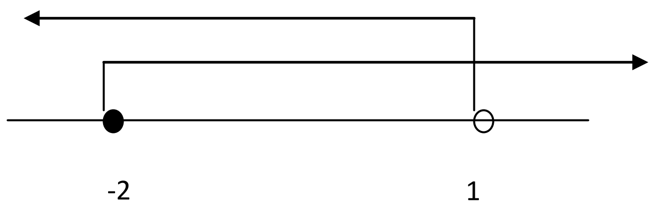
$$3x-3 \geq 2x-5$$
$$6(2x-1) < (3+3x)$$

$$x \geq -2$$
$$12x-6 < 3+3x$$

$$x \geq -2$$
$$9x < 9$$

$$x \geq -2$$
$$x < 1$$

Znázorníme graficky:



Řešením je průnik. $X \in \langle -2, 1)$