

# KOMBINATORIKA

Kombinatorika se zabývá vytvářením skupin o určitém počtu prvků  $k$  vybíraných z množin o  $n$  prvcích a určování počtu těchto skupin.

Při tomto vyhledávání skupin prvků jde o tyto odlišnosti:

- ve skupině prvků na jejich pořadí buď záleží, nebo nezáleží
- ve skupině prvků se prvky budou opakovat nebo nebudou

## Základní pravidla kombinatoriky

**Kombinatorické pravidlo součtu:** Jsou-li  $A_1, A_2, \dots, A_n$  konečné množiny, které mají po řadě  $p_1, p_2, \dots, p_n$  prvků, a jsou-li každé dvě množiny disjunktivní, pak počet prvků množiny  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$  je roven  $p_1 + p_2 + \dots + p_n$ .

Konečné množiny  $\Rightarrow A_1$  má  $p_1$  prvků,  $A_2$  má  $p_2$  prvků, atd.

Disjunktivnost  $\Rightarrow$  nemají žádné společné prvky

$\cup \Rightarrow$  sjednocení.

**Kombinatorické pravidlo součinu:** Počet všech uspořádaných  $k$ -tic, jejichž první člen lze vybrat  $n_1$  způsoby, druhý člen po výběru prvního  $n_2$  způsoby atd. až  $k$ -tý člen po výběru všech předcházejících členů  $n_k$  způsoby, je roven  $n_1 * n_2 * \dots * n_k$ .

Při výpočtech kombinatorických úloh se využívá  **$n!$  – faktoriál**. A je definován takto:

$$n! = n(n-1)(n-2) \dots * 5 * 4 * 3 * 2 * 1$$

$$5! = 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 120$$

Pro zjednodušení zápisů byl zaveden symbol  $\binom{n}{k}$ , čteme  **$n$  nad  $k$** , nazýváme **kombinační číslo**.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{pro } 0 \leq k \leq n$$

$$\binom{n}{k} = n$$

$$\binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{0}{0} = 1$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

## Variace bez opakování

**kčlená variace z  $n$  prvků** je uspořádaná ktice sestavená z těchto prvků tak, že každý prvek se v ní vyskytuje nejvýše jednou (na pořadí prvků ktice tedy záleží). Počet všech kčlenných variací označujeme  $V_k(n)$ .

$$V_k(n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$$

$$V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

### Příklady na variace bez opakování

Výbor sportovního klubu tvoří 6 mužů a 4 ženy. Urči:

- kolika způsoby z nich lze vybrat předsedu, místopředsedu, jednatele a hospodáře,
- kolika způsoby z nich lze vybrat funkcionáře podle a) tak, aby ve funkci předsedy byl muž a ve funkci místopředsedy žena nebo obráceně,
- kolika způsoby z nich lze vybrat funkcionáře podle a) tak, aby právě jedním z nich byla žena.

a)  $p = V_4(10) = \frac{10!}{6!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5\,040$

Funkcionáře lze vybrat 5 040 způsoby.

Máme k dispozici 10 lidí, z nichž chceme vybrat čtveřici, ve které záleží na pořadí.

b)  $\begin{array}{cccc} P & M & J & H \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline & & \underbrace{\phantom{J \ H}} & \end{array}$  nebo  $\begin{array}{cccc} P & M & J & H \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline & & \underbrace{\phantom{J \ H}} & \end{array}$   
muž žena kdokoliv                      žena muž kdokoliv

$p_1 = V_1(6) \cdot V_1(4) \cdot V_2(8)$                       nebo                       $p_2 = V_1(4) \cdot V_1(6) \cdot V_2(8)$

$p = p_1 + p_2 = 2 \cdot \frac{6!}{5!} \cdot \frac{4!}{3!} \cdot \frac{8!}{6!} = 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 7 = 2\,688$

Funkcionáře lze za daných podmínek vybrat 2 688 způsoby.

c)  $\begin{array}{cccc} P & M & J & H \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline & & \underbrace{\phantom{J \ H}} & \end{array}$                        $\begin{array}{cccc} P & M & J & H \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline & & \downarrow & \end{array}$   
kterákoliv trojice mužů, záleží na pořadí                      kterákoliv žena  
↓  
kterákoliv žena

$\begin{array}{cccc} P & M & J & H \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline & & \downarrow & \end{array}$                        $\begin{array}{cccc} P & M & J & H \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline & & & \downarrow \end{array}$   
kterákoliv žena                      kterákoliv žena

$p = 4 \cdot V_1(4) \cdot V_3(6) = 4 \cdot \frac{4!}{3!} \cdot \frac{6!}{3!} = 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 1\,920$

Funkcionáře lze za dané podmínky vybrat 1 920 způsoby.

Urči, kolika způsoby lze sestavit rozvrh na jeden den pro třídu, v níž se vyučuje 12 předmětům a každému nejvýše hodinu denně, má-li se skládat ze šesti předmětů. V kolika z nich se vyskytuje daný předmět a v kolika z nich je tento předmět zařazen na 1. vyučovací hodinu?

$$p_1 = V_6(12) = \frac{12!}{6!} = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 665\,280$$

Vybíráme 6 předmětů ze 12 předmětů a záleží na pořadí.

$$p_2 = 6 \cdot V_5(11) = 6 \cdot \frac{11!}{6!} = 6 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 332\,640$$

Daný předmět může být v šesti různých hodinách, k němu vybíráme dalších 5 předmětů z 11 zbylých.

$$p_3 = V_5(11) = \frac{11!}{6!} = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 55\,440$$

Vybíráme jen pěti následujících předmětů po 1. vyučovací hodině z 11 zbylých předmětů.

## Permutace bez opakování

**Permutace z  $n$  prvků** je uspořádaná  $n$ tice z těchto prvků. To znamená, že do skupiny vybereme všech  $n$  prvků a jejich pořadí zaměňujeme. Počet všech permutací označujeme  **$P(n)$** .

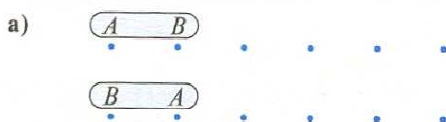
$$P(n) = n!$$

### Příklady na permutace bez opakování

Urči, kolika způsoby se v šestimístné lavici může posadit 6 chlapců, jestliže:

a) dva chtějí sedět vedle sebe,

b) dva chtějí sedět vedle sebe a třetí na kraji.



Dvojici bereme jako jeden prvek.

Chlapci mohou sedět  $A$  vedle  $B$ , nebo  $B$  vedle  $A$ .

$$p = 2 \cdot P(5) = 2 \cdot 120 = 240$$

Chlapci se mohou posadit 240 způsoby.



$$p_1 = 2 \cdot P(4)$$



$$p_2 = 2 \cdot P(4)$$

$$p = 4 \cdot P(4) = 96$$

Chlapci se mohou posadit 96 způsoby.

S připomínkami k navrhovanému zákonu chce v parlamentě vystoupit šest poslanců  $A, B, C, D, E, F$ .

Urči počet: a) všech možných pořadí jejich vystoupení,

b) všech pořadí, v nichž vystupuje  $A$  po  $E$ ,

c) všech pořadí, v nichž vystupuje  $A$  ihned po  $E$ .

a)  $p = P(6) = 6! = 720$

Počet všech možných pořadí vystoupení je 720.

b)

$\left. \begin{array}{l} \cdot E A \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot E \cdot A \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot E \cdot \cdot A \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot E \cdot \cdot \cdot A \cdot \cdot \cdot \\ \cdot E \cdot \cdot \cdot \cdot A \cdot \cdot \end{array} \right\} p_1 = 5 \cdot P(4)$	,	$\left. \begin{array}{l} \cdot \cdot \cdot E A \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \cdot E \cdot A \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \cdot E \cdot \cdot \cdot A \cdot \cdot \end{array} \right\} p_3 = 3 \cdot P(4)$
$\left. \begin{array}{l} \cdot \cdot E A \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot E \cdot A \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot E \cdot \cdot \cdot A \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot E \cdot \cdot \cdot \cdot A \cdot \cdot \end{array} \right\} p_2 = 4 \cdot P(4)$	,	$\left. \begin{array}{l} \cdot \cdot \cdot \cdot E A \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \cdot \cdot E \cdot A \cdot \cdot \end{array} \right\} p_4 = 2 \cdot P(4)$
		$\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot E A \quad p_5 = 1 \cdot P(4)$

$p = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 15 \cdot P(4) = 15 \cdot 24 = 360$

Počet všech pořadí vystoupení, v nichž vystupuje  $A$  po  $E$ , je 360.

c)  $p = P(5) = 5! = 120$

Skupinu  $EA$  považujeme za jeden prvek.

Počet všech pořadí vystoupení, v nichž vystupuje  $A$  ihned po  $E$ , je 120.

## Kombinace bez opakování

**kčlenná kombinace z  $n$  prvků** je neuspořádaná ktice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše jednou. To znamená, že na pořadí prvků ve skupině nezáleží. Počet všech kčlenných kombinací označujeme  $C_k(n)$ .

$$C_k(n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n - k)!}$$

## Příklady na kombinace bez opakování

Urči, kolika způsoby lze na šachovnici ( $8 \times 8$  polí) vybrat:

a) trojici polí,

b) trojici polí neležících v témže sloupci,

c) trojici polí neležících v témže sloupci ani v téže řadě,

d) trojici polí, která jsou nestejně barvy.

$$a) p = C_3(64) = \binom{64}{3} = \frac{64!}{3! \cdot 61!} = \frac{64 \cdot 63 \cdot 62}{3 \cdot 2} = 41\,664$$

Vybíráme 3 políčka ze 64, nezáleží na pořadí.

Trojici políček lze vybrat 41 664 způsoby.

$$b) p = C_3(64) - 8 \cdot C_3(8) = \binom{64}{3} - 8 \cdot \frac{8!}{3! \cdot 5!} = 41\,216$$

Od všech trojic odečteme ty, které leží ve stejném sloupci.

Trojici políček neležících v jednom sloupci lze vybrat 41 216 způsoby.

$$c) 2 \cdot 8 \cdot \binom{8}{3}$$

Určíme počet trojic políček ležících v témže sloupci nebo řadě.

$$p = \binom{64}{3} - 16 \binom{8}{3} = 40\,768$$

Od všech trojic odečteme ty, které leží v témže sloupci a v téže řadě.

Trojici políček neležících v jednom sloupci ani jedné řadě lze vybrat 40 768 způsoby.

$$d) \binom{32}{2} \cdot \binom{32}{1}$$

Určíme počet trojic, které mají jedno pole bílé a dvě černá.

$$p = 2 \cdot \binom{32}{2} \cdot \binom{32}{1} = 64 \cdot \binom{32}{2} = 31\,744$$

Počet trojic, které mají dvě pole bílá a jedno černé, je stejný.

Trojici políček, která jsou nestejně barvy lze vybrat 31 744 způsoby.

Urči, kolika způsoby je možno ze 7 mužů a 4 žen vybrat šestičlennou skupinu, v níž jsou:

a) právě dvě ženy,

b) alespoň dvě ženy.

$$a) p = \binom{4}{2} \cdot \binom{7}{4} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot \frac{7!}{4! \cdot 3!} = 210$$

Ke dvěma ženám vybereme čtyři ze sedmi.

Skupinu se dvěma ženami lze vybrat 210 způsoby.

$$b) p = \binom{4}{2} \cdot \binom{7}{4} + \binom{4}{3} \cdot \binom{7}{3} + \binom{4}{4} \cdot \binom{7}{2} = 371$$

Alespoň dvě ženy znamená: buď právě dvě nebo právě tři nebo právě čtyři ženy.

Skupinu s nejméně dvěma ženami lze vybrat 371 způsoby.

## Variace s opakováním

**kčlená variace s opakováním z  $n$  prvků** je uspořádaná ktice sestavená z těchto prvků tak, že každý prvek se v ní vyskytuje nejvýše  $k$ krát. Počet všech  $k$ členných variací s opakováním označujeme  $V'_k(n)$ .

$$V'_k(n) = n^k$$

## Příklady na variace s opakováním

Státní poznávací značka v nějakém státě je tvořena uspořádanou sedmicí, jejíž první tři členy jsou písmena vybíraná z 28 písmen a další 4 číslice. Urči, kolik poznávacích značek je ve státě k dispozici.

$$p = V_3'(28) \cdot V_4'(10) = 28^3 \cdot 10^4 = 219\,520\,000$$

Ve státě je k dispozici 219 520 000 značek.

Urči počet všech přirozených čísel menších než 1 000 000, která lze zapsat dekadicky pouze užitím číslic 5 a 8.

$$V_1'(2) = 2^1 = 2$$

$$V_2'(2) = 2^2 = 4$$

$$V_3'(2) = 2^3 = 8$$

$$V_4'(2) = 2^4 = 16$$

$$V_5'(2) = 2^5 = 32$$

$$V_6'(2) = 2^6 = 64$$

$$p = 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 = 126$$

Počet jednociferných čísel.

Počet dvojciferných čísel.

Počet trojčiferných čísel.

Počet čtyřčiferných čísel.

Počet pěticiferných čísel.

Počet šesticiferných čísel.

Hledaných čísel je 126.

## Permutace s opakováním

**kčlenná permutace s opakováním z  $n$  prvků** je uspořádaná ktice z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje alespoň jednou. Počet všech permutací s opakováním z  $n$  prvků, v nichž se jednotlivé prvky opakují  $k_1$ krát,  $k_2$ krát, ...  $k_n$ krát, se označuje  $P'(k_1, k_2, \dots, k_n)$ .

$$P'(k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_n)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n!}$$

## Příklady na permutace s opakováním

Urči počet způsobů, jimiž lze umístit všechny bílé šachové figurky (král, dáma, 2 věže, 2 jezdcí, 2 střelci, 8 pěšců):

a) na dvě pevně zvolené řady šachovnice ( $8 \times 8$  polí),

b) na libovolné dvě řady šachovnice.

$$\text{a) } p = P'(8, 2, 2, 2, 1, 1) = \frac{16!}{8! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!} = 64\,864\,800$$

Dvě pevně zvolené řady mají 16 polí.

$$\text{b) } \binom{8}{2}$$

Počet způsobů, jak lze vybrat 2 řady.

Na každé z těchto dvou řad

máme rozmístit 16 figur.

$$p = \binom{8}{2} \cdot P'(8, 2, 2, 2, 1, 1) = 1\,816\,214\,400$$

Bílé figurky lze na dvě pevně zvolené řady umístit 64 864 800 způsoby

a na dvě libovolné řady 1 816 214 400 způsoby.

Urči počet všech pěticičerných přirozených čísel, jež lze sestavit z cifer 5 a 7, má-li v každém z nich být číslice 5:

a) právě třikrát,

b) nejvýše třikrát,

c) aspoň třikrát.

$$\text{a) } p = P'(3, 2) = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$$

Počet pěticičerných čísel z cifer 5, 5, 5, 7, 7.

$$\text{b) } p_1 = P'(0, 5) = \frac{5!}{5!} = 1$$

Počet pěticičerných čísel z cifer 7, 7, 7, 7, 7.

$$p_2 = P'(1, 4) = \frac{5!}{1! \cdot 4!} = 5$$

Počet pěticičerných čísel z cifer 5, 7, 7, 7, 7.

$$p_3 = P'(2, 3) = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$$

Počet pěticičerných čísel z cifer 5, 5, 7, 7, 7.

$$p_4 = P'(3, 2) = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$$

Počet pěticičerných čísel z cifer 5, 5, 5, 7, 7.

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 26$$

$$\text{c) } p_1 = P'(3, 2) = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$$

Počet pěticičerných čísel z cifer 5, 5, 5, 7, 7.

$$p_2 = P'(4, 1) = \frac{5!}{4! \cdot 1!} = 5$$

Počet pěticičerných čísel z cifer 5, 5, 5, 5, 7, 7.

$$p_3 = P'(5, 0) = \frac{5!}{5! \cdot 0!} = 1$$

Počet pěticičerných čísel z cifer 5, 5, 5, 5, 5.

$$p = p_1 + p_2 + p_3 = 16$$

Hledaných pěticičerných čísel, ve kterých je číslice 5 třikrát, je 10.

Hledaných pěticičerných čísel, ve kterých je číslice 5 nejvýše třikrát, je 26.

Hledaných pěticičerných čísel, ve kterých je číslice 5 alespoň třikrát, je 16.

## Kombinace s opakováním

**kčlenná kombinace s opakováním z  $n$  prvků** je neuspořádaná  $k$ tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše  $k$ krát. Počet všech  $kčlenných$  kombinací s opakováním označujeme  $C'_k(n)$ .

$$C'_k(n) = \binom{n+k-1}{k}$$

### Příklady na kombinace s opakováním

Urči počet kvádrů, jejichž velikosti hran jsou přirozená čísla nejvýše rovná deseti.  
Urči, kolik je v tomto počtu krychlí.

$$C'_3(10) = \binom{12}{3} = \frac{12!}{3! \cdot 9!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2} = 220$$

$$C'_1(10) = \binom{10}{1} = \frac{10!}{1! \cdot 9!} = 10$$

Počet všech kvádrů je 220, počet krychlí je 10.

V sáčku jsou červené, modré a zelené kuličky. Kuličky téže barvy jsou nerozlišitelné.

Urči, kolika způsoby lze vybrat 5 kuliček, jestliže v sáčku je:

a) alespoň 5 kuliček od každé barvy,

b) 5 červených, 4 modré a 4 zelené.

$$a) C'_5(3) = \binom{7}{5} = \frac{7!}{5! \cdot 2!} = 21$$

Pět kuliček lze vybrat 21 způsoby.

$$b) C'_5(3) - 2 = 19$$

Pět kuliček lze vybrat 19 způsoby.

V pěti kuličkách, které vybíráme, nezáleží na pořadí a barvy se v ní mohou opakovat. Jde tedy o 5členné kombinace s opakováním ze tří prvků.

Je možné vytvořit všechny možné pětičky, protože kuliček od každé barvy je dostatečné množství.

Nelze vybrat pět modrých ani pět zelených kuliček.

Ostatní výběry provést lze.

## Binomická věta

Pro všechna  $a, b \in R$  a  $n \in N$  platí:

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n} b^n$$

Tento zápis nazýváme **rozvojem výrazu  $(a + b)^n$** .

Vypočítejte  $(x^2 + y)^5$

$$\begin{aligned} (x^2 + y)^5 &= \binom{5}{0} (x^2)^5 + \binom{5}{1} (x^2)^4 y + \binom{5}{2} (x^2)^3 y^2 + \binom{5}{3} (x^2)^2 y^3 + \binom{5}{4} (x^2)^1 y^4 \\ &\quad + \binom{5}{5} y^5 = x^{10} + 5x^8 y + 10x^6 y^2 + 10x^4 y^3 + 5x^2 y^4 + y^5 \end{aligned}$$

