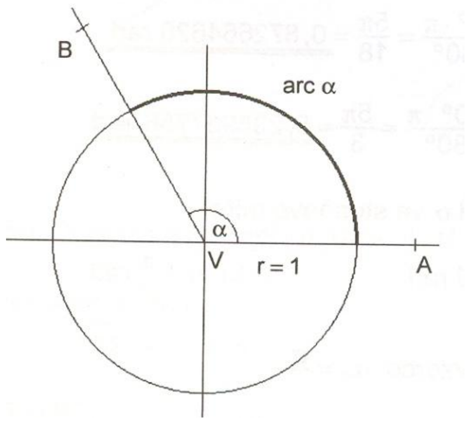
GONIOMETRIE A TRIGONOMETRIE
ÚHEL A JEHO VELIKOST, STUPŇOVÁ A OBLOUKOVÁ MÍRA ÚHLU

Velikost úhlu můžeme měřit ve stupních. Úhel, který je shodný se svým úhlem vedlejším, nazýváme **pravý** (R) a jednu jeho devadesátinu označujeme jako **stupeň** (°). Stupeň rozdělujeme na šedesát dílů a jeden díl nazýváme **minuta** (′). Minuta se skládá z šedesáti **vteřin** (″).

V soustavě SI a v matematice se pro měření úhlu používá **radián** (rad), což je jednotka v tzv. **obloukové míře úhlu**.

Velikost úhlu α v obloukové míře je rovna **délce oblouku** v jednotkové kružnici (r=1), kterou vytínají ramena daného úhlu a jehož vrchol je ve středu této kružnice. Číselná hodnota délky tohoto oblouku se nazývá **arkus** α a značí se arc α.

Jeden radián je tedy úhel, kterému přísluší oblouk délky jedna.



Pro určení vztahů mezi stupni a radiány:

Velikost plného úhlu je ve stupňové míře 360° a v obloukové míře 2π radiánů, neboť obvod jednotkové kružnice je 2π.

π je tzv. Ludolfovo číslo a jeho hodnota je přibližně 3,14.

Platí: arc 360° = 2π

$$\text{arc } 1° = \frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180} = 0{,}0174533$$

Označíme-li α velikost libovolného úhlu v radiánech a jeho velikost ve stupních α_0, pak platí:

$$\alpha = \frac{\alpha_0 * \pi}{180^\circ} \qquad \alpha_0 = \frac{\alpha * 180^\circ}{\pi}$$

π rad = 180° $\qquad 1\,rad = \frac{180^\circ}{\pi}$

1 rad = 57°17′45″

Následující tabulka ukazuje hodnoty některých úhlů v míře stupňové a obloukové:

$\frac{\alpha_0}{\text{(st.)}}$	0	30	45	60	90	120	150	180	270	360
$\frac{\alpha}{\text{(rad)}}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Příklad: Vyjádřete úhel α v radiánech:

α = 50°

$$\alpha = \frac{\alpha_0 * \pi}{180^\circ} = \frac{50^\circ * \pi}{180^\circ} = \frac{5\pi}{18} = \mathbf{0{,}872664626\ rad}$$

Příklad: Vyjádřete úhel α ve stupních:

α = 2,5 rad

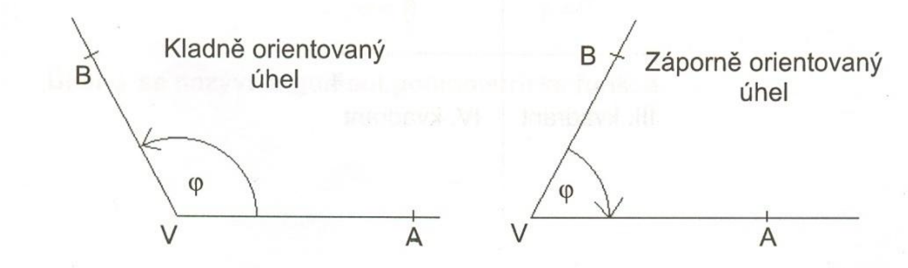
$$\alpha_0 = \frac{\alpha * 180^\circ}{\pi} = \frac{2{,}5 * 180^\circ}{\pi} = 143{,}2394488^\circ = \mathbf{143^\circ 14' 22''}$$

GONIOMETRICKÉ FUNKCE OBECNÉHO ÚHLU A JEJICH GRAFY

V matematice vždy nevystačíme jen s úhlem, který je definován jako část roviny a nabýval hodnot od 0 rad do 2π rad (od $0°$ do $360°$). Proto se zavádí nový pojem – orientovaný úhel.

Orientovaný úhel je každá uspořádaná dvojice polopřímek se společným počátkem, přičemž jedna z těchto polopřímek je **počáteční rameno** a druhá **koncové rameno.**

Úhel vzniká otočením počátečního ramene **proti směru hodinových ručiček** (v matematice kladně) – **úhel orientován kladně**, nebo otáčením počátečního ramene ve **směru hodinových ručiček** – **úhel orientován záporně.**



Při otáčení může polopřímka vykonat libovolný počet otáček.

Příklad: Určete velikost orientovaného úhlu ω, když $\varphi = 198°$ a $k = 4$

Použijeme vztah: $\boldsymbol{\omega = \varphi + 2k\pi}$, kde φ se nazývá základní úhel a k je celé číslo.

$\omega = \varphi + 2k\pi = \varphi + k*360° = 198° + 4*360° = \mathbf{1638°}$

Příklad: Určete velikost základního úhlu, jestliže $\omega = 2984°$

Postupujeme tak, že úhel ω dělíme $360°$ a zbytek je úhel φ.

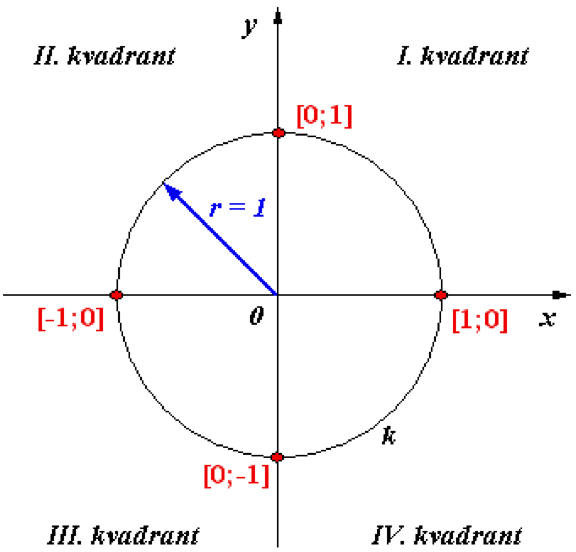
$2984 / 360 = 8{,}2888 \cong 8$

$\omega = \varphi + 2k\pi = \varphi + k*360°$

$\varphi = 2984° - k*360° = 2984° - 8*360° =$ **104°**

Jednotková kružnice

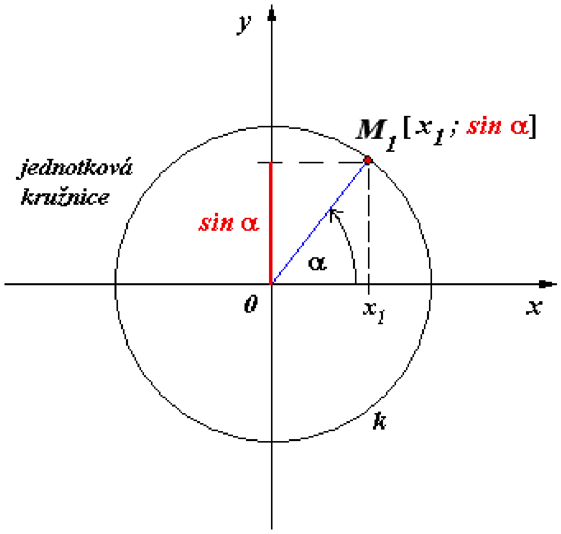
Jednotková kružnice je taková kružnice, jejíž poloměr je 1. Využít ji můžeme například k odvození goniometrických funkcí platících pro pravoúhlý trojúhelník.

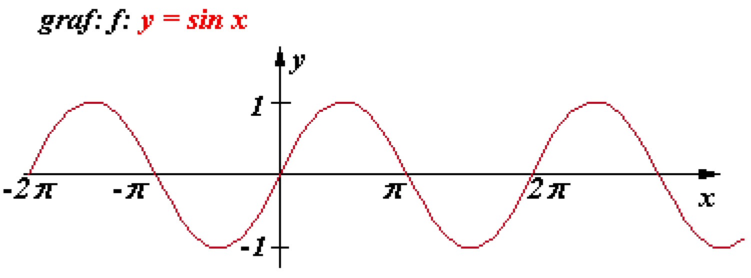


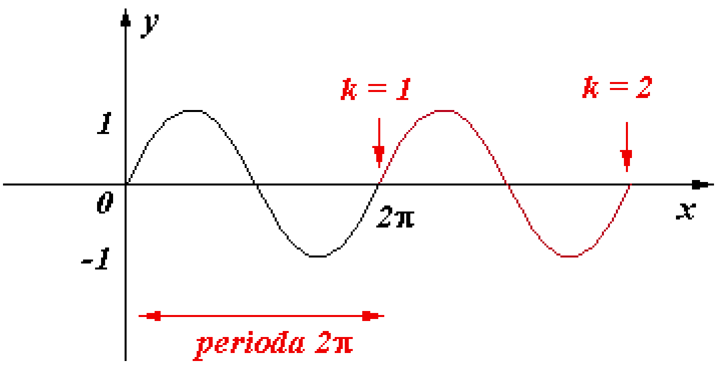
KVADRANT	sin x	cos x	tg x	cotg x
I.	+	+	+	+
II.	+	−	−	−
III.	−	−	+	+
IV.	−	+	−	−

Funkce sinus

Určení funkce z jednotkové kružnice:



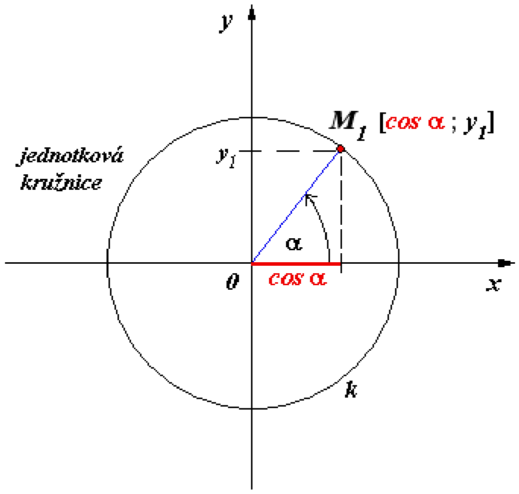


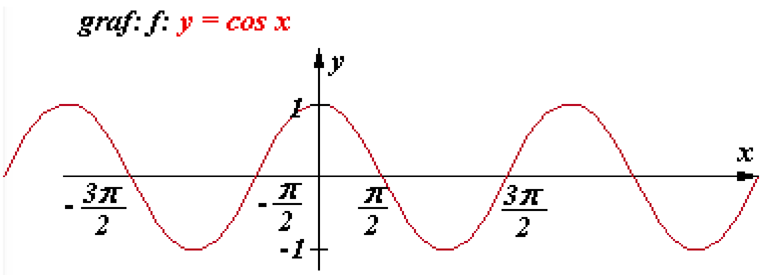


1. Definiční obor funkce $D(f) = R$,
2. Obor hodnot $H(f)$ je $\langle -1; 1 \rangle$
3. Funkce je omezená shora i zdola
4. Funkce je periodická s periodou 2π
5. Funkce je lichá

Funkce kosinus

Určení funkce z jednotkové kružnice:

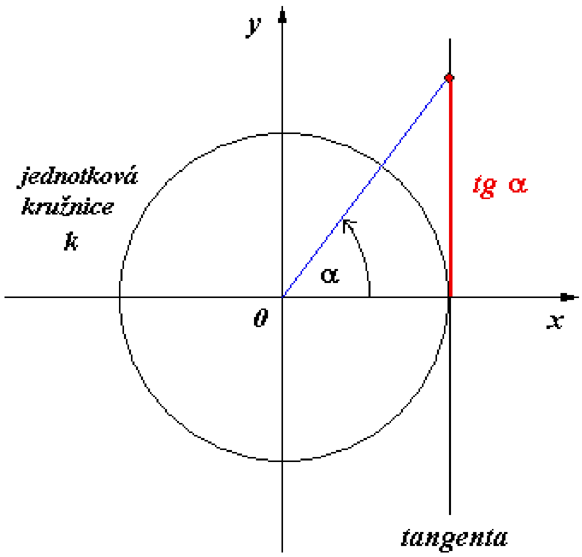




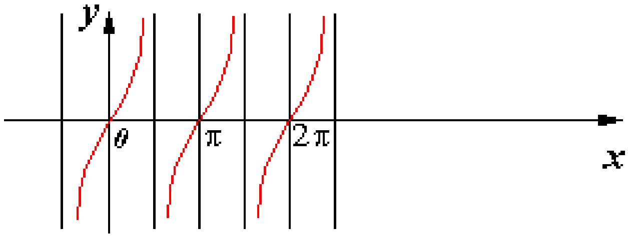
1. Definiční obor funkce $D(f) = R$,
2. Obor hodnot $H(f)$ je $\langle -1; 1 \rangle$
3. Funkce je omezená shora i zdola
4. Funkce je periodická s periodou 2π
5. Funkce je sudá

Funkce tangens

Určení funkce tangens z jednotkové kružnice:



Graf funkce $y = tg\ \alpha$

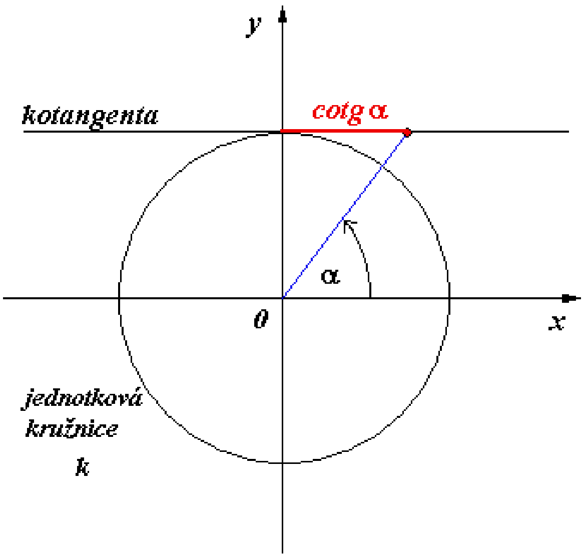


Vlastnosti funkce:

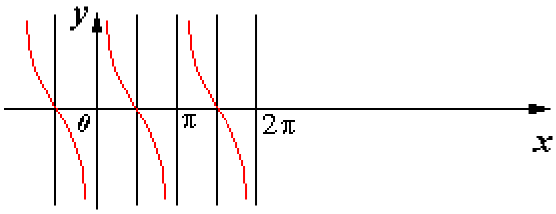
1. Definiční obor $D(f)$: $\alpha \in R$; $\alpha \neq (2k + 1)\ \pi/2$
2. Obor hodnot $H(f) = R$
3. Funkce je lichá
4. Funkce je periodická s periodou $k.\pi$
5. Funkce není omezená shora ani zdola
6. Pro $\alpha \in (-\pi/2 + k\pi\ ;\ \pi/2 + k\pi)$ je rostoucí

Funkce kotangens

Určení funkce z jednotkové kružnice:



Graf funkce $y = cotg\ \alpha$



Vlastnosti funkce:

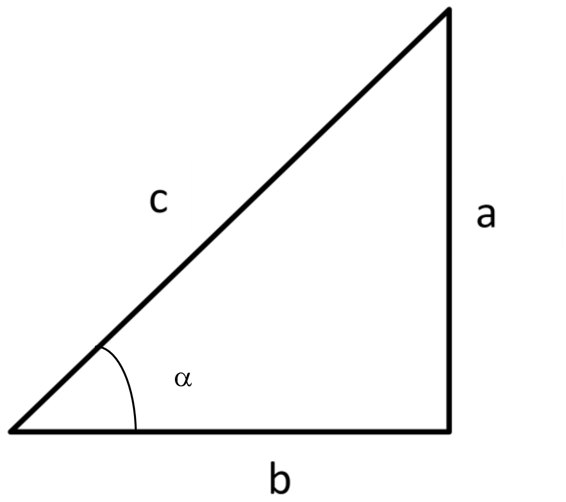
1. Definiční obor $D(f)$: $\alpha \in R$; $\alpha \neq k\pi$
2. Obor hodnot $H(f) = R$
3. Funkce je lichá
4. Funkce je periodická s periodou $k.\pi$
5. Funkce není omezená shora ani zdola
6. Pro $\alpha \in (k\pi\ ;\ \pi + k\pi)$ je klesající

GONIOMETRICKÉ FUNKCE OSTRÉHO ÚHLU

Ostrým úhlem nazýváme úhel $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Goniometrické funkce ostrého úhlu α definujeme pomocí pravoúhlého trojúhelníku s vnitřním úhlem α takto:

sin α = a/c = protilehlá odvěsna/ přepona
cos α = b/c = přilehlá odvěsna/ přepona
tg α = a/b = protilehlá odvěsna/ přilehlá odvěsna
cotg α b/a = přilehlá odvěsna/ protilehlá odvěsna



Hodnoty goniometrických funkcí se dají najít v tabulkách, ale stačí i kapesní kalkulátor.

Některé hodnoty jsou uvedeny v následující tabulce:

α	0°	30°	45°	60°	90°
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	není def.
cotg α	není def.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Příklad:

V pravoúhlém trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu C je |AB| = c = 8 cm, |BC| = a = 5 cm. Vypočti velikosti ostrých úhlu při vrcholech A, B trojúhelníku ABC.

Řešení:

|AB| = c = 8 cm
|BC| = a = 5 cm
α = ? [° ´]
β = ? [° ´]

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

$$\sin \propto = \frac{5}{8}$$

sin α = 0,625
α = 38°41´

$$\cos\beta = \frac{a}{c}$$

$$\cos\beta = \frac{5}{8}$$

cos β = 0,625
β = 51°19´

VZTAHY MEZI GONIOMETRICKÝMI FUNKCEMI OSTRÉHO ÚHLU

V každém pravoúhlém trojúhelníku s úhly α, β platí: $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \wedge \cos\beta = \frac{a}{c} \Rightarrow \sin\alpha = \cos\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \wedge \sin\beta = \frac{b}{c} \Rightarrow \cos\alpha = \sin\beta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} \wedge \operatorname{cotg}\beta = \frac{a}{b} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{cotg}\beta = \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a} \wedge \operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a} \Rightarrow \operatorname{cotg}\alpha = \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

Pro každý ostrý úhel platí:

1. $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$
2. *$tg\alpha * cotg\alpha = 1$*
3. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
4. $cotg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$
5. $cotg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}$

Příklad: Určete sin 12°40′

Nejprve převedeme minuty tak, že počet minut dělíme šedesáti:

$$\frac{40}{60} = 0{,}66$$

sin 12°40′= sin 12,66 = **0,2192786242**

Příklad: Určete úhel α, když sin α = 0,283425

$\sin \alpha = 0{,}283425$
$\alpha = \sin^{-1} 0{,}283425 = 16{,}46472623$

Desetinnou část převedeme na minuty tak, že ji násobíme šedesáti:
$0{,}46472623 \cdot 60 = 28'$

$\boldsymbol{\alpha = 16°28'}$

Příklad:

Zjednodušte: $$\frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}$$

Řešení:

$$\frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} = \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \cos x} = 1 + \cos x$$