Funkce, vlastnosti funkcí

Co je to funkce?

Funkce je předpis, který každému číslu x z množiny M přiřadí právě jedno y z množiny N. Funkce se dá také definovat jako **zobrazení**. Funkci obvykle zapisujeme ve tvaru $y = f(x)$, či ji můžeme vyjádřit explicitně $f{:}y = x$, kde proměnná x je **argument funkce**.

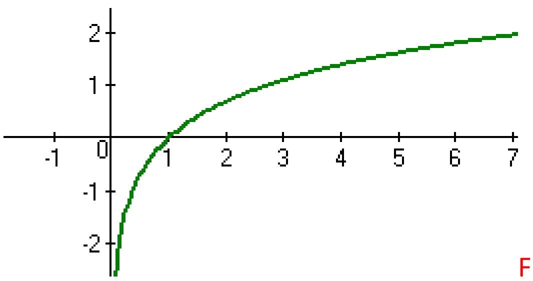
Definiční obor a obor hodnot

U každé funkce musíme také určit její **definiční obor** (značíme $D(f)$), což je množina všech přípustných hodnot argumentu x, tedy všechny hodnoty, kterých může proměnná x nabývat. Jednoduchý příklad: $f{:}y = x$ zde je definiční obor roven celé množině reálných čísel $D(f) = \boldsymbol{R}$. Jiný příklad: $f{:}y = 1 / x$ v tomto případě je definiční obor množina reálných čísel, ale tentokrát bez nuly, protože nemůžete dělit nulou, výraz by poté nedával smysl $D(f) = \boldsymbol{R} - \{0\}$.

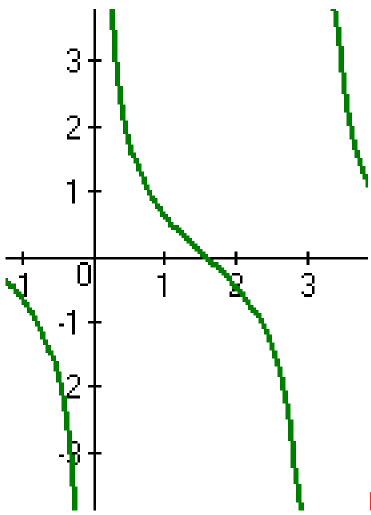
Obor hodnot (značíme $H(f)$) je poté analogicky množina všech přípustných y, tedy množiny všech prvků, kam může ukazovat funkce f. Opět jednoduchý příklad: mějme funkci $f{:}y = x$. Zde je oborem hodnot množina $\boldsymbol{R}$, protože y může dosahovat libovolné hodnoty z této množiny. Vezměme si ovšem další funkci $f{:}y = |x|$ (absolutní hodnota). Tady již bude obor hodnot roven intervalu $<0, +\infty)$, protože se nikdy nemůže stát, že by se y rovnalo například minus pěti, protože to z definice absolutní není možné.

Monotónnost funkce

Monotónnost funkce je vlastnost, která určuje, zda je funkce na daném intervalu **rostoucí**, **klesající**, **nerostoucí**, **neklesající** anebo **konstantní**. Nejlépe jde tato vlastnost vyčíst z grafu. Funkce je *rostoucí*, pokud $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ (tedy je-li první číslo větší než druhé, musí být i funkční hodnota prvního čísla větší než druhého). Naopak je *klesající*, jestliže $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ (je-li první číslo větší než druhé, musí být funkční hodnota prvního menší než druhého).



Funkce rostoucí na celém svém definičním oboru – přirozený logaritmus

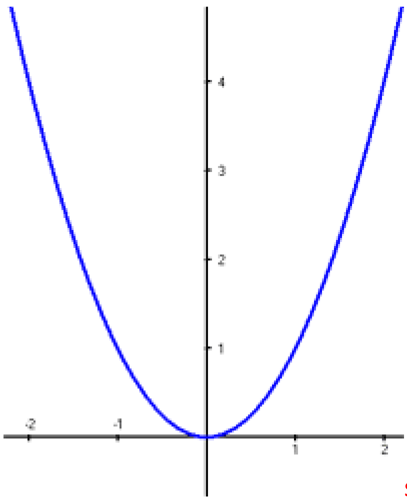


Funkce klesající na intervalu nula až π - kotangens

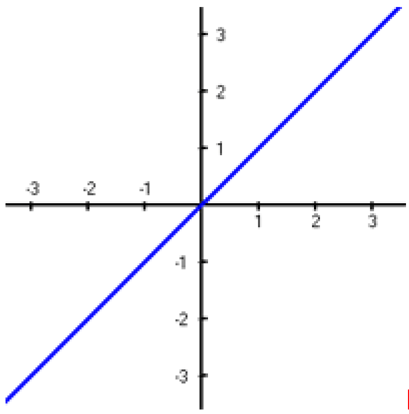
Konstantní funkce se definuje zcela jednoduše: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$. Funkce neklesající a nerostoucí se definují podobně jako klesající a rostoucí - funkce je neklesající, pokud je na daném intervalu rostoucí anebo Konstantní, což dává definici $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ a obdobně pro nerostoucí: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

Funkce sudá a lichá

Některé funkce mohou být za jistých podmínek **sudé** anebo **liché**. Nejjednodušší je znát graf funkce, tam to lze poznat nejrychleji. Funkce sudá je totiž souměrná podle osy y, kdežto funkce lichá je souměrná podle počátku. Příklad sudé funkce může být $y = x^2$ a liché prakticky nejjednodušší funkce $y = x$.



sudá funkce souměrná podle osy y - kvadratická funkce



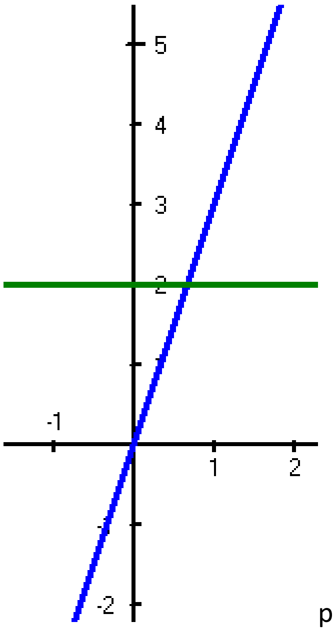
lichá funkce souměrná podle počátku – lineární funkce

Matematicky se pak tyto vlastnosti zapíší takto: sudá funkce $f(x) = f(-x)$ (funkce je sudá, jestliže funkční hodnota v x se rovná funkční hodnotě v $-x$). Lichá funkce: $f(-x) = -f(x)$ (funkce je lichá, jestliže se funkční hodnota v $-x$ rovná minus funkční hodnotě v x). x vždy vybíráme z definičního oboru.

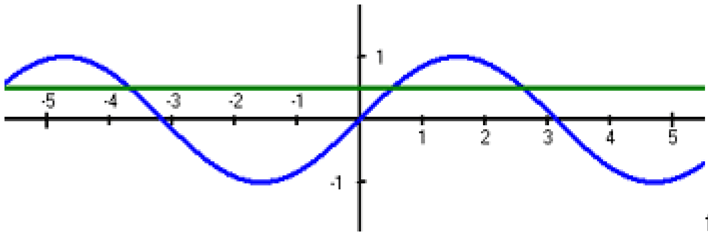
Funkce prostá

Prostá funkce je taková funkce, pro kterou platí $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. Pokud má být funkce prostá, každému x musí být přiřazeno jedinečné y, nemůže se stát, že by pro dvě různá x byla stejná funkční hodnota. Neboli - jak říká předchozí definice - pokud se rovnají funkční hodnoty, musí se rovnat i jejich argumenty. Graficky se to dá poznat jako vždycky zcela jednoduše. Pokud položíte grafem přímku rovnoběžnou s osou x, musí protínat graf maximálně v jednom bodě. Příkladem prosté funkce je například lineární funkce $y = 3x$. Ať vezmete jakoukoliv přímku, vždy protne graf právě v jednom bodě. Opakem je třeba funkce sinus, jejíž graf tvoří jakési vlnky, takže pokud položíte přímku rovnoběžnou s osou x protínající osu y v bodě $0{,}5$, naleznete nekonečně mnoho průsečíků s grafem, tudíž to není funkce prostá.

Prostá funkce **Není prostá funkce**



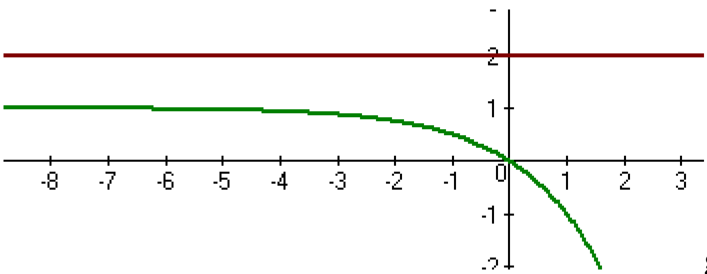
prostá funkce, přímka protíná graf v jednom bodě – lineární funkce



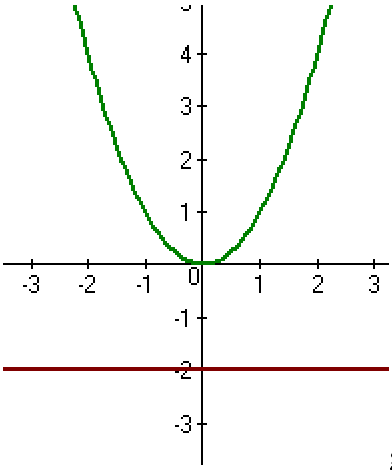
funkce není prostá, přímka protíná graf v nekonečném množství bodů – funkce sinus

Funkce omezená

Funkce mohou být omezené a to **shora omezené**, **zdola omezené** anebo jak shora, tak zdola - takové funkci prostě říkáme **funkce omezená**. Funkce *f* je shora omezená, pokud nalezneme takové číslo *A*, pro které platí - pro všechna *x* z definičního oboru - $f(x) \leq A$. Pokud je tedy funkce shora omezená, musíme najít číslo, které bude větší než všechny možné výsledky funkce, tedy větší než jakýkoliv prvek z oboru hodnot. Na grafu si to můžete představit takto - pokud najdete vodorovnou přímku a všechny body grafu se nacházejí pod touto přímkou, je funkce shora omezená.

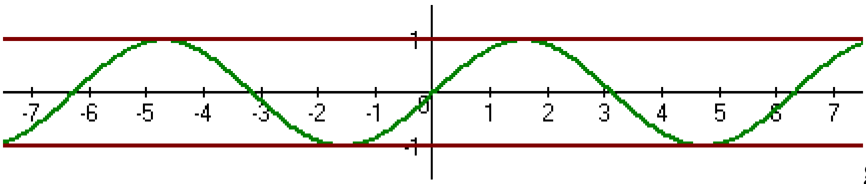


graf funkce omezené shora - Na tomto je graf exponenciální funkce $-(2^x) + 1$. Jak je vidět, funkce je to shora omezená, neboť jsme schopni nalézt vodorovnou přímku (to je ta hnědá čára), která bude nad grafem - celý graf se nachází pod touto přímkou. Povšimněte si prosím, že není nutné, aby nalezená přímka byla jakousi „nejbližší přímkou“, stačí prostě nalézt přímku jakkoliv vzdálenou od grafu, jež splňuje zadané podmínky.



graf funkce omezené zdola - kvadratická funkce. Funkce **zdola omezená** se definuje velice podobně - musíme najít takové číslo A, pro které platí - pro všechna x z definičního oboru - $f(x) \geq A$. Je to ten samý případ jako u shora omezené funkce, jen hledáte takové číslo, pro které platí, že všechny funkční hodnoty budou větší, ne menší. V grafu poté hledáte přímku, která bude zcela pod grafem. Na tomto obrázku vidíte graf funkce x^2, která je zdola omezená, neboť jsme schopni nalézt ono číslo A (zde znázorněno přímkou $y = -2$), které bude menší než všechny funkční hodnoty grafu.

Pokud je funkce omezená shora i zdola, jedná se o funkci **omezenou**. Jako hezký příklad může posloužit periodická funkce sinus:



graf funkce omezené – funkce sinus

Minimum a maximum

Funkce může mít na nějakém intervalu z definičního oboru lokální extrém, tedy buď lokální minimum nebo lokální maximum. Pokud za dotyčný interval budeme počítat přímo definiční obor a nalezneme zde extrém, nejedná se již o lokální maximum či minimum, ale o maximum a minimum celé funkce. Pokud má být M lokální minimum, musíme být schopni nalézt takový interval (a, b), pro který platí, že pro všechny x z intervalu (a, b) platí, že $f(x) > f(M)$. Pro maximum N se pouze vymění znaménko - $f(x) < f(N)$.

Na grafu asi maximum a minimum funkce najdete docela snadno, podíváte se prostě, kde je funkce nejníže či nejvýše. Funkce ovšem samozřejmě nemusí mít ani minimum ani maximum, či může mít pouze minimum anebo pouze maximum, stejně tak může funkce mít pouze lokální extrémy, ale na celém definičním oboru nemít žádný extrém. Ještě je docela důležité upozornit na to, že extrémy se nepočítají na y-ové ose, ale na x-ové, tedy nalezneme-li souřadnice nejvyššího bodu funkce na daném intervalu, maximum je x-ová souřadnice tohoto bude, ne y-ová.