Jednoduchá exponenciální rovnice

Z běžné rovnice se exponenciální stává, pokud obsahuje proměnnou v exponentu. Obecně bychom mohli exponenciální rovnici zapsat takto: $a^{f(x)} = b^{g(x)}$, kde $a, b > 0$. Typickým příkladem exponenciální rovnice může být třeba $2^x = 8$. Zde je docela evidentní, že výsledek bude číslo tři, protože dva na třetí je osm. A teď následuje trošku matematičtější postup.
Pokud chceme vyřešit exponenciální rovnici, je velice výhodné, můžeme-li rovnici upravit na tvar $a^{f(x)} = b^{g(x)}$, kde $a = b$. Je totiž zjevné, že pokud máme stejné základy, budou se mocniny rovnat v případě, že jsou i stejné exponenty. Počítáme již tedy pouze rovnici $f(x) = g(x)$. Předchozí příklad můžeme upravit následovně: odmocníme osmičku $2^x = 2^3$ a následně dostáváme stejné základy, tudíž pouze položíme do rovnosti oba exponenty a vychází nám zároveň výsledek $x = 3$. Příklad můžeme ztížit například takto: $2^{2x} = 8$ a po úpravě opět dostáváme $2^{2x} = 2^3$ a počítáme $2x = 3$, výsledek je $1{,}5$.
Další jednoduchý případ nastává, pokud se na jedné straně rovnice vyskytuje jednička. Vezměme si tento příklad: $5^{3x-2} = 1$. Vypadá to složitě, ale pokud znáte základní vztahy mezi mocninami, víte, že jedničku můžete získat jedině dvěma způsoby - buď je základ jedna a poté jedna na jakýkoliv exponent dává zase jedna anebo je exponent roven nule - cokoliv na nulu je opět jedna. My využijeme pochopitelně tu druhou vlastnost a přepíšeme předchozí rovnici takto: $5^{3x-2} = 5^0$. Nyní jsme dostali rovnici do tvaru, který již umíme řešit (viz předchozí odstavec). Stačí porovnat exponenty. Zde vychází rovnice $3x - 2 = 0$. To už je triviální lineární rovnice.

Logaritmování exponenciální rovnice

V případě, že nemůžeme rovnici upravit na tvar se stejnými základy, můžeme zkusit metodu logaritmování. Naše pančelka vždycky říkala „Děcka, když nebudete vědět jak dál, tak to prostě zlogaritmujte!“ a měla pravdu. Pokud máte exponenciální rovnici o různých základech, přičemž není možné (nebo to není efektivní) je upravit na stejný základ, celou rovnici zlogaritmujte. Z původní rovnice $a^{f(x)} = b^{g(x)}$ dostanete $f(x) \cdot \log a = g(x) \cdot \log b$.

Takže mějme tento příklad $2^x \cdot 5^{2x} = 3^{x-2}$:

$2^x \cdot 5^{2x} = 3^{x-2}$	» základy nejsou stejné a nejdou upravit, proto celou rovnici zlogaritmujeme
$\log(2^x \cdot 5^{2x}) = \log(3^{x-2})$	» nyní využijeme věty o logaritmech #1 a první závorku „roznásobíme“
$\log 2^x + \log 5^{2x} = \log(3^{x-2})$	» nyní opět využijeme věty o logaritmech #3 a „přesuneme“ exponent před logaritmus
$x \cdot \log 2 + 2x \cdot \log 5 = (x - 2) \log 3$	» Roznásobíme pravou část rovnice
$x \cdot \log2 + 2x \cdot \log5 = x \cdot \log3 - 2 \log3$	» Výrazy s neznámou hodíme na levou část rovnice
$x \cdot \log2 + 2x \cdot \log5 - x \cdot \log3 = -2 \log3$	» Vytkneme *x*
$x \cdot (\log 2 + 2\log 5 - \log 3) = -2\log 3$	» Osamostatníme *x*

$$x = \frac{-2\log 3}{\log 2 + 2\log 5 - \log 3}$$

To už je de facto výsledek. Můžeme ještě znova aplikovat věty o logaritmech a z $2\log 5$ udělat $\log 5^2 = \log 25$, ale je to už vážně poslední věc, co můžeme s výsledkem dělat.

Substituce

Exponenciální rovnice můžeme také řešit za pomocí substituce. Ukážeme si to na příkladu: $7^{2x} + 7^x - 6 = 0$. Nyní si třeba za a dosadíme hodnotu $a = 7^x$. Nyní upravíme původní rovnici tak, že za 7^x dosadíme a. Vznikne takováto (již ne exponenciální) rovnice: $a^2 + a - 6$. Toto je prostá kvadratická rovnice. Jejími kořeny jsou čísla 2 a -3.

Tyto kořeny nyní dosadíme do substituce $a = 7^x$. Tedy $2 = 7^x$. Zlogaritmujeme: $\log 2 = x \cdot \log 7$ a osamostatníme: $x = \log 2 / \log 7$. Druhý kořen již dosazovat nemusíme, protože je záporný - po dosazení by nám vyšel logaritmus se záporného čísla, což není možné. A výsledek exponenciální rovnice je na světě ;-).

Příklady

U příkladů budeme používat některé vzorce a úpravy u mocnin.

Pro jistotu je přepíšu i zde, ať je máte po ruce:

- $a^m \cdot a^n = a^{(m+n)}$
- $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
- $a^m / a^n = a^{(m-n)}$
- $(a^n)^2 = a^{2n}$

První příklad: Spočítejte následující exponenciální rovnici:

$2^{3x-4} = 8^{2x+1}$.

Na první pohled vidíme, že se základy na obou stranách nerovnají. Smutné. Ale na druhý pohled již jistě uvidíme úpravu, jakou můžeme provést, abychom ty stejné základy dostali. Místo osmičky budeme zkrátka počítat s 2^3, což se rovná osmi. Použitím vzorců, které jsem uvedl výše, konkrétně toho posledního, dostáváme:

$2^{3x-4} = 8^{2x+1}$ /aplikujeme poslední vzorec

$2^{3x-4} = 2^{3\cdot(2x+1)}$ /roznásobíme exponent

$2^{3x-4} = 2^{6x+3}$

V tuto chvíli se již základy rovnají a můžeme vypočítat jednoduchou lineární rovnici $3x - 4 = 6x + 3$:

$3x - 4 = 6x + 3$

$-3x = 7$

$x = -7/3$

Druhý příklad: Vypočítejte následující exponenciální rovnici:

$5x \cdot 2x = 100x-1.$

Zde jako obvykle vidíme, že základy stejné nejsou. Ale asi všichni tušíme, že nějak převést půjdou. Na levou stranu aplikujeme vzorec na násobení mocnin o stejném exponentu (v předchozím přehledu je to druhý vzoreček) a na pravou stranu aplikujeme stejný vzorec jako před chvílí a z 100^{x-1} uděláme $10^{2(x-1)}$:

$5^x \cdot 2^x = 100^{x-1}$ */aplikujeme druhý vzorec*

$10^x = 10^{2(x-1)}$ */roznásobíme exponent*

$10^x = 10^{2x-2}$

A už tam zase máme stejné základy a můžeme počítat klasickou lineární rovnici:

$x = 2x - 2$

$-x = -2$

$x = 2$

Třetí příklad: Vypočítejte exponenciální rovnici:

$3x + 3x+1 = 108$.

Jako vždycky se ke stejnému základu musíme nejprve dopracovat. Zde si pomůžeme vytýkáním a vytkneme z výrazu na levé straně 3^x:

$3^x + 3^{x+1} = 108$ /vytkneme 3^x

$3^x \cdot (1 + 3^1) = 108$ /sečteme závorku

$4 \cdot 3^x = 108$ /vydělíme 4

$3^x = 27$

V tuto chvíli jsme upravili levou stranu a je na čase upravit pravou stranu. Poměrně jasně vidíme, že se jedná o třetí mocninu trojky:

$3^x = 27$

$3^x = 3^3$

No a už zbývá pouze poslední krok – základy se rovnají, takže položíme do rovnosti exponenty:

$x=3$

Čtvrtý příklad: Spočítejte následující exponenciální rovnici:

$4^{2x} - 6 \cdot 4^x + 8 = 0$.

V tomto případě se z exponenciální rovnice pokusíme dostat běžnou kvadratickou rovnici. Nejlépe se k ní dopracujeme za pomoci substituce

$4^x = a$:

$4^{2x} - 6 \cdot 4^x + 8 = 0$ /provedeme zmíněnou substituci

$a^2 - 6a + 8 = 0$

Teď už z toho máme standardní kvadratickou rovnici, takže počítáme diskriminant a kořeny:

$D = 36 - 4 \cdot 8$ /vypočítáme kořeny

$a_{1,2}=(6 +- 2)/2$

$a_1 = 4$

$a_2 = 2$

Tyto dílčí výsledky ještě musíme dosadit zpět do substituce. První výsledek:

$4^x = 4$

$x=1$

A druhý výsledek:

$4x=2$

$4x=4½$

$x=½$

použitá literatura:

http://matematika.havrlant.net/exponencialni-rovnice