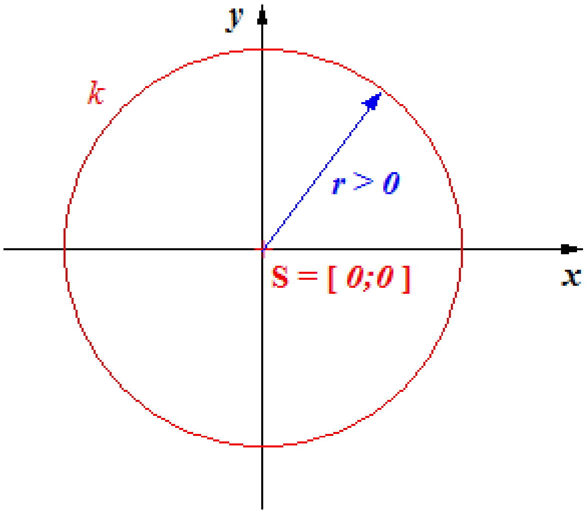
Analytické vyjádření kružnice



Kružnice k se středem S[0; 0] (v počátku souřadné soustavy) a poloměrem r > 0 je množina všech bodu roviny, které mají od středu S stejnou vzdálenost r. Rovnice kružnice se středem v počátku souřadné soustavy je určena rovnicí:

$X^2 + y^2 = r^2$

Tuto rovnici lze odvodit na základě určení vzdálenosti dvou bodu - konkrétně středu S a libovolného bodu X ležícího na kružnici:

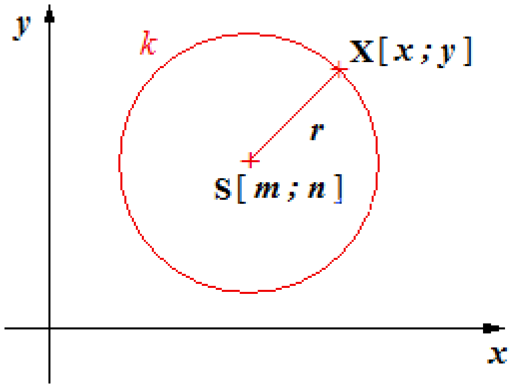
$|SX| = r$

$|SX|^2 = (x - 0)^2 + (y - 0)^2 = r^2 \quad \Big|^2$

$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = r^2$

$\underline{\underline{x^2 + y^2 = r^2}}$

Středový tvar rovnice kružnice



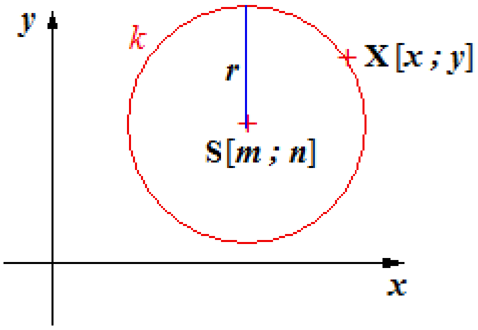
$$|SX| = r$$

$$|SX|^2 = (x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2 \qquad \Big|^2$$

$$\underline{\underline{(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2}}$$

Obecný tvar rovnice kružnice

Při odvozování obecného tvaru rovnice kružnice se vychází ze středového tvaru rovnice kružnice:



$$(x-m)^2+(y-n)^2=r^2$$

Roznásobení (podle vzorce pro druhou mocninu rozdílu): $x^2-2xm+m^2+y^2-2yn+n^2=r^2$

Sestupné uspořádání členů podle mocnin: $x^2+y^2-2xm-2yn+m^2+n^2-r^2=0$

m, n, r ... konstanty (daná čísla)

Úprava výrazu: $x^2+y^2+\underbrace{(-2m)}_{a}x+\underbrace{(-2n)}_{b}y+\underbrace{(m^2+n^2-r^2)}_{c}=0$

Obecný tvar rovnice kružnice: $x^2+y^2+ax+by+c=0$

a, b, c ... reálná čísla

Příklad:
Napište rovnici kružnice, která má střed v počátku soustavy souřadnic a prochází bodem A[-3; 2].

Řešení:

Kružnice se středem S[0; 0] má rovnici $x^2 + y^2 = r^2$. Poloměr r zjistíme dosazením souřadnic bodu A ležícího na kružnici do této rovnice:
$(-3)^2 + 2^2 = r^2$
$\mathbf{r^2 = 13}$
Daná kružnice má rovnici $x^2 + y^2 = 13$; její Poloměr je $r = \sqrt{13}$.

Příklad:

Rozhodnete o vzájemné poloze bodu A[4; 3], B[1; 1], C[2; 0] a kružnice dané rovnicí $x^2 + y^2 = 4$.

Řešení:

Zjistíme, zda hodnota výrazu $x^2 + y^2$ pro souřadnice bodu A, B, C je bud rovna 4 (bod leží na kružnici), nebo je menší než 4 (bod vnitrní oblasti kružnice), nebo je vetší než 4 (bod vnější oblasti kružnice).

Pro souřadnice bodu A platí: $4^2 + 3^2 = 25$
Protože 25 > 4, je bod A bodem vnější oblasti kružnice.

Pro souřadnice bodu B platí: $1^2 + 1^2 = 2$
Protože 2 < 4, je bod B bodem vnitřní oblasti kružnice.

Pro souřadnice bodu C platí: $2^2 + 0^2 = 4$
Protože 4 = 4, je bod C tedy leží na kružnici.

Příklad:

Napište středový i obecný tvar rovnice kružnice se středem S[1; -2] a poloměrem r = 3.

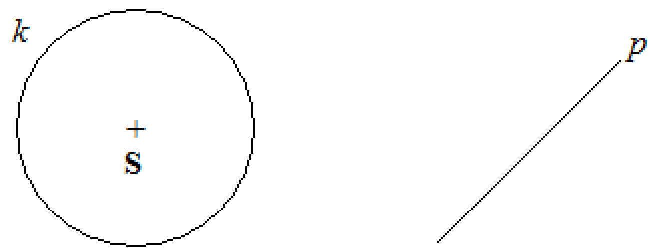
Řešení:

Dosadíme zadané hodnoty do rovnice

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$$

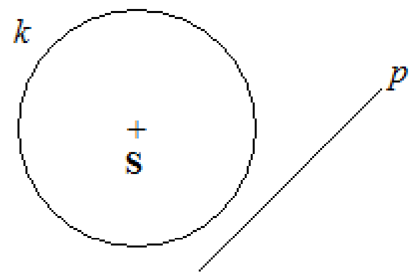
$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$ ... dostali jsme rovnici kružnice ve středovém tvaru.
Provedeme-li naznačené úpravy, dostaneme obecný tvar rovnice kružnice:
$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 9$
$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$

Vzájemná poloha přímky a kružnice

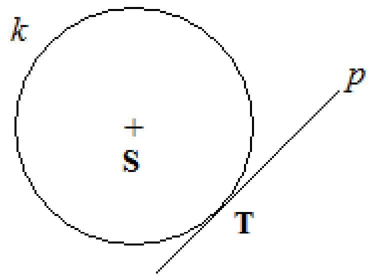


Vzájemná poloha přímky a kružnice se početně určí tak, že do rovnice kružnice se dosadí rovnice přímky. Vznikne tak kvadratická rovnice o jedné neznámé.

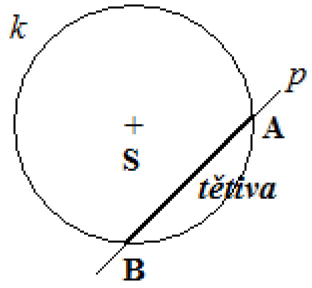
a) **p je vnější přímkou kružnice k**
- kružnice a přímka nemají žádný společný bod
- kvadratická rovnice nemá řešení



b) **p je tečnou ke kružnici k**
- kružnice a přímka mají právě jeden společný bod
- kvadratická rovnice má právě jedno řešení



c) **p je sečna ke kružnici k**
- kružnice a přímka mají společné body A, B, jejichž vzdálenost určuje tzv. **tětivu**
- kvadratická rovnice má dvě řešení



Příklad:
Zjistěte vzájemnou polohu přímky p: 4x - 3y - 20 = 0 a kružnice dané rovnicí $x^2 + y^2 = 25$.

Řešení:
Vzájemnou polohu přímky a kružnice zjistíme řešením soustavy rovnic:
4x - 3y - 20 = 0
$x^2 + y^2 = 25$

Z první rovnice vyjádříme např. y:

$$y = \frac{4}{3}x - \frac{20}{3}$$

Dosadíme do druhé rovnice:

$$x^2 + \left(\frac{4}{3}x - \frac{20}{3}\right)^2 = 25$$

Dostaneme kvadratickou rovnici:
$5x^2 - 32x + 35 = 0$

Ta má diskriminant:
$D = (-32)^2 - 4 * 5 * 35 = 324$

Protože D > 0, má kvadratická rovnice dva reálné různé kořeny: $x_1 = 5$, $x_2 = 7/5$. Dosazením za x_1 do rovnice přímky dostaneme $y_1 = 0$, dosazením za x_2 do rovnice přímky dostaneme $y_2 = -24/5$.

Přímka je sečnou kružnice k. Průsečíky P, Q přímky s kružnicí mají souřadnice [5; 0], [7/5; -24/5].

Příklad:

Stanovte číslo z tak, aby přímka p: x + 2y + z byla tečnou kružnice o rovnici $x^2 + y^2 = 4$.

Řešení:

$(-2y - z)^2 + y^2 = 4$

$5y^2 + 4zy + z^2 - 4 = 0$

Aby přímka byla tečnou kružnice, musí být diskriminant D kvadratické rovnice roven nule.

$D = 16z^2 - 4 * 5 * (z^2 - 4)$

$D = 0$

$16z^2 - 20 . (z^2 - 4) = 0$

$z^2 = 20$

$z_1 = 2\sqrt{5}$

$z_2 = -2\sqrt{5}$

Přímka je tedy tečnou dané kružnice, je-li buď $z_1 = 2\sqrt{5}$ nebo $z_2 = -2\sqrt{5}$